Corrigé de l'Examen National de Mathématiques 2025 – Session Normale

Sciences Physiques, SVT et Sciences et Technologies

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact : 0644127117 / 0708875223

Exercice 1

1) a) La sphère (S) est de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R=2$.
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $O(a,b,c)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ici, on a :

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0, \quad R=2.$$

Donc :

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2^2.$$

D'où :

$$x^2+y^2+z^2=4.$$

Ainsi :

$$x^2+y^2+z^2=4.$$

b) Vérifions que A et B appartiennent à la sphère (S).
Pour $A(0,0,2)$, on a :

$$x_A^2+y_A^2+z_A^2=0^2+0^2+2^2=0+0+4=4.$$

Donc :

$$A \in (S).$$

Pour $B(2,0,0)$, on a :

$$x_B^2+y_B^2+z_B^2=2^2+0^2+0^2=4+0+0=4.$$

Donc :

$$B \in (S).$$

Par conséquent :

$$A \in (S) \text{ et } B \in (S).$$

2) a) Le plan (OAB) passe par le centre O de la sphère (S).
Or l'intersection d'une sphère avec un plan passant par son centre est un grand cercle.
Donc l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S) est un cercle de centre O et de rayon égal au rayon de la sphère.
Ainsi :

L'intersection est un cercle de centre O et de rayon 2.

b) Le point I est le milieu du segment $[AB]$.

Donc :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

Ainsi :

$$I\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right).$$

Donc :

$$I(1,0,1).$$

On a :

$$\overrightarrow{OI} = (1,0,1)$$

et :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} = (2-0, 0-0, 0-2) = (2,0,-2).$$

Calculons le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times (-2).$$

Donc :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

On en déduit que :

$$(OI) \perp (AB).$$

Comme $I \in (AB)$, alors la distance de O à la droite (AB) est :

$$d(O,(AB)) = OI.$$

Calculons OI :

$$OI = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2}.$$

Donc :

$$OI = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}.$$

Par conséquent :

$$d(O,(AB)) = \sqrt{2}.$$

3) a) On a :

$$A(0,0,2), \quad B(2,0,0), \quad M(0,m,0).$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} = (2-0, 0-0, 0-2) = (2,0,-2),$$

et :

$$\overrightarrow{AM} = (0-0, m-0, 0-2) = (0,m,-2).$$

Calculons le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 0 \\ \vec{j} & 0 & m \\ \vec{k} & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Alors :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = (0 \times (-2) - (-2) \times m)\,\vec{i} - (2 \times (-2) - (-2) \times 0)\,\vec{j} + (2 \times m - 0 \times 0)\,\vec{k}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = (0 + 2m)\vec{i} - (-4 - 0)\vec{j} + (2m - 0)\vec{k}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}.$$

b) Le vecteur : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABM).
On peut prendre :

$$\vec{n} = (m, 2, m).$$

Le plan (ABM) passe par $A(0, 0, 2)$. Son équation est donc :

$$m(x - 0) + 2(y - 0) + m(z - 2) = 0.$$

Alors :

$$mx + 2y + mz - 2m = 0.$$

Donc :

$$(ABM) : mx + 2y + mz - 2m = 0.$$

c) La distance du point $O(0, 0, 0)$ au plan :

$$mx + 2y + mz - 2m = 0$$

est donnée par :

$$d(O, (ABM)) = \frac{|m \cdot 0 + 2 \cdot 0 + m \cdot 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 2^2 + m^2}}.$$

Donc :

$$d(O, (ABM)) = \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + 4 + m^2}}.$$

Ainsi :

$$d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{2m^2 + 4}}.$$

Par conséquent :

$$d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}.$$

4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r.
On sait que :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Or :

$$R = 2$$

et :

$$d = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}.$$

Donc :

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}\right)^2}.$$

Ainsi :

$$r = \sqrt{4 - \frac{4m^2}{4+2m^2}}.$$

On réduit au même dénominateur :

$$r = \sqrt{\frac{4(4+2m^2) - 4m^2}{4+2m^2}}.$$

Donc :

$$r = \sqrt{\frac{16+8m^2-4m^2}{4+2m^2}}.$$

D'où :

$$r = \sqrt{\frac{16+4m^2}{4+2m^2}}.$$

En factorisant :

$$r = \sqrt{\frac{4(4+m^2)}{2(2+m^2)}}.$$

Donc :

$$r = \sqrt{\frac{2(4+m^2)}{2+m^2}}.$$

Or :

$$2(4+m^2) = 2(2+m^2) + 4.$$

Alors :

$$\frac{2(4+m^2)}{2+m^2} = 2 + \frac{4}{2+m^2}.$$

Ainsi :

$$r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}.$$

Comme :

$$m^2 \geq 0,$$

on a :

$$2 + m^2 \geq 2.$$

Donc :

$$0 < \frac{4}{2+m^2} \leq 2.$$

Alors :

$$2 < 2 + \frac{4}{2+m^2} \leq 4.$$

En passant à la racine :

$$\sqrt{2} < \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}} \leq 2.$$

Par conséquent :

$$\sqrt{2} < r \leq 2.$$

Exercice 2

1) a) On a :

$$a = 1 + 2i, \qquad b = 1 - 2i.$$

Alors :

$$a + b = (1 + 2i) + (1 - 2i).$$

Donc :

$$a + b = 1 + 1 + 2i - 2i = 2.$$

Ainsi :

$$a + b = 2.$$

Le point P est le milieu du segment $[AB]$. Donc son affixe est :

$$p = \frac{a+b}{2}.$$

Ainsi :

$$p = \frac{2}{2} = 1.$$

Donc :

$$p = 1.$$

b) Vérifions que a et b sont solutions de l'équation :

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

Pour $z = a = 1 + 2i$, on a :

$$a^2 - 2a + 5 = (1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5.$$

Or :

$$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2.$$

Comme $i^2 = -1$, alors :

$$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i.$$

Donc :

$$a^2 - 2a + 5 = (-3 + 4i) - 2(1 + 2i) + 5.$$

Ainsi :

$$a^2 - 2a + 5 = -3 + 4i - 2 - 4i + 5.$$

D'où :

$$a^2 - 2a + 5 = (-3 - 2 + 5) + (4i - 4i) = 0.$$

Donc :

$$a^2 - 2a + 5 = 0.$$

Pour $z = b = 1 - 2i$, on a :

$$b^2 - 2b + 5 = (1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5.$$

Or :

$$(1 - 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2.$$

Comme $i^2 = -1$, alors :

$$(1 - 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i.$$

Donc :

$$b^2 - 2b + 5 = (-3 - 4i) - 2(1 - 2i) + 5.$$

Ainsi :

$$b^2 - 2b + 5 = -3 - 4i - 2 + 4i + 5.$$

D'où :

$$b^2 - 2b + 5 = (-3 - 2 + 5) + (-4i + 4i) = 0.$$

Donc :

$$b^2 - 2b + 5 = 0.$$

Par conséquent :

a et b sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2) a) On a :

$$\omega = \frac{5}{2}.$$

Calculons $|\omega - a|$:

$$|\omega - a| = \left|\frac{5}{2} - (1 + 2i)\right|.$$

Donc :

$$|\omega - a| = \left|\frac{5}{2} - 1 - 2i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right|.$$

Ainsi :

$$|\omega - a| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4}.$$

Donc :

$$|\omega - a| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Calculons $|\omega - b|$:

$$|\omega - b| = \left|\frac{5}{2} - (1 - 2i)\right|.$$

Donc :

$$|\omega - b| = \left|\frac{5}{2} - 1 + 2i\right| = \left|\frac{3}{2} + 2i\right|.$$

Ainsi :

$$|\omega - b| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Calculons $|\omega - c|$.
On a :

$$c = \frac{3(3+i)}{2} = \frac{9+3i}{2}.$$

Alors :

$$|\omega - c| = \left|\frac{5}{2} - \frac{9+3i}{2}\right|.$$

Donc :

$$|\omega - c| = \left|\frac{5-9-3i}{2}\right| = \left|\frac{-4-3i}{2}\right|.$$

Ainsi :

$$|\omega - c| = \frac{1}{2}|-4-3i| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}.$$

Donc :

$$|\omega - c| = \frac{1}{2}\sqrt{16+9} = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{5}{2}.$$

Par conséquent :

$$|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = \frac{5}{2}.$$

b) Comme :

$$|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|,$$

alors le point Ω est équidistant des points A, B et C.
Donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Ainsi :

Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) On a :

$$d = \frac{3(1+i)}{2}$$

et :

$$c = \frac{3(3+i)}{2}.$$

Donc :

$$d - c = \frac{3(1+i)}{2} - \frac{3(3+i)}{2}.$$

Ainsi :

$$d - c = \frac{3+3i-9-3i}{2}.$$

Donc :

$$d - c = \frac{-6}{2} = -3.$$

D'autre part :

$$a - b = (1+2i) - (1-2i).$$

Donc :

$$a-b=1+2i-1+2i=4i.$$

Ainsi :

$$\frac{d-c}{a-b}=\frac{-3}{4i}.$$

Or :

$$\frac{1}{i}=-i.$$

Donc :

$$\frac{-3}{4i}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{i}=-\frac{3}{4}(-i)=\frac{3}{4}i.$$

Par conséquent :

$$\frac{d-c}{a-b}=\frac{3}{4}i.$$

b) On calcule :

$$d-b=\frac{3(1+i)}{2}-(1-2i).$$

Donc :

$$d-b=\frac{3+3i}{2}-1+2i=\frac{3+3i}{2}-\frac{2}{2}+\frac{4i}{2}$$

Ainsi :

$$d-b=\frac{3+3i-2+4i}{2}=\frac{1+7i}{2}.$$

D'autre part :

$$c-a=\frac{3(3+i)}{2}-(1+2i).$$

Donc :

$$c-a=\frac{9+3i}{2}-1-2i=\frac{9+3i}{2}-\frac{2}{2}-\frac{4i}{2}.$$

Ainsi :

$$c-a=\frac{9+3i-2-4i}{2}=\frac{7-i}{2}.$$

Calculons $(c-a)i$:

$$(c-a)i=\frac{7-i}{2}i.$$

Donc :

$$(c-a)i=\frac{7i-i^2}{2}.$$

Comme $i^2=-1$, on obtient :

$$(c-a)i=\frac{7i+1}{2}=\frac{1+7i}{2}.$$

Or :

$$d-b=\frac{1+7i}{2}.$$

Donc :

$$d-b=(c-a)i.$$

Ainsi :

$$d-b=(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent :

$$\arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Donc les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.
Ainsi :

$$(DB) \perp (AC).$$

4) a) L'homothétie h est de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$.
Donc :

$$z' - c = \frac{2}{3}(z-c).$$

Ainsi :

$$z' = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}c + c.$$

Donc :

$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}c.$$

Or :

$$c = \frac{3(3+i)}{2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Alors :

$$\frac{1}{3}c = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\right).$$

Donc :

$$\frac{1}{3}c = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Par conséquent :

$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi :

$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

b) Comme $G = h(P)$ et $p = 1$, alors :

$$g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Donc :

$$g = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi :

$$g = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Réduisons :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{13}{6}.$$

Donc :

$$g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi :

$$g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i.$$

5) Montrons que les points Ω, G et D sont alignés.
On calcule :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}.$$
On a :
$$\omega=\frac{5}{2},\quad g=\frac{13}{6}+\frac{1}{2}i,\quad d=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i.$$
Alors :
$$\omega-g=\frac{5}{2}-\left(\frac{13}{6}+\frac{1}{2}i\right).$$
Donc :
$$\omega-g=\frac{5}{2}-\frac{13}{6}-\frac{1}{2}i.$$
$$\omega-g=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i.$$
D'autre part :
$$\omega-d=\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right).$$
Donc :
$$\omega-d=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i=1-\frac{3}{2}i.$$
Ainsi :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i}{1-\frac{3}{2}i}.$$
Réduisons les deux nombres :
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}i=\frac{2-3i}{6},$$
et :
$$1-\frac{3}{2}i=\frac{2}{2}-\frac{3}{2}i=\frac{2-3i}{2}.$$
Donc :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}=\frac{\frac{2-3i}{6}}{\frac{2-3i}{2}}.$$
Ainsi :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}=\frac{2-3i}{6}\times\frac{2}{2-3i}.$$
Donc :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$
On obtient :
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}\in\mathbb{R}.$$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{D\Omega}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont colinéaires.
Par conséquent :

Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3 : Probabilités

1) a) L'urne contient 6 boules. On tire simultanément deux boules.
Le nombre total de tirages possibles est :

$$C_6^2 = 15.$$

L'événement A : « les deux boules tirées portent le numéro 1 ».
Il y a 4 boules portant le numéro 1.
Donc le nombre de cas favorables est :

$$C_4^2 = 6.$$

Ainsi :

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Donc :

$$P(A) = \frac{2}{5}.$$

b) L'événement B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
On a 4 boules blanches et 2 boules noires.
Les cas favorables sont :

$$C_4^2 + C_2^2.$$

Donc :

$$P(B) = \frac{C_4^2 + C_2^2}{C_6^2}.$$

Ainsi :

$$P(B) = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Donc :

$$P(B) = \frac{7}{15}.$$

c) On calcule $P(A \cap B)$.
L'événement $A \cap B$ signifie : les deux boules tirées portent le numéro 1 et sont de même couleur.
Parmi les boules portant le numéro 1, il y a 3 boules blanches et 1 boule noire.
Pour que les deux boules soient de même couleur et portent le numéro 1, il faut choisir deux boules blanches parmi les 3 boules blanches portant le numéro 1.
Donc :

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^2}{C_6^2}.$$

Ainsi :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

D'autre part :

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15}.$$

Donc :

$$P(A) \times P(B) = \frac{14}{75}.$$

Or :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} = \frac{15}{75}.$$

Donc :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B).$$

Par conséquent :

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

2) a) On répète l'expérience précédente trois fois successives.
La variable aléatoire X compte le nombre de réalisations de l'événement A.
On a :

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Calculons les probabilités :
Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a :

$$P(X = k) = C_3^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-k}.$$

$$P(X = k) = C_3^k.P(A)^k.P(\overline{A})^{3-k}$$

$$P(X = 0) = P(\overline{A}) \times P(\overline{A}) \times P(\overline{A})$$

$$P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}.$$

$$P(X = 1) = 3 \times P(A) \times P(\overline{A}) \times P(\overline{A})$$

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = 3 \times \frac{18}{125} = \frac{54}{125}.$$

$$P(X = 2) = 3 \times P(A) \times P(A) \times P(\overline{A})$$

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 3 \times \frac{12}{125} = \frac{36}{125}.$$

$$P(X = 3) = P(A) \times P(A) \times P(A)$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}.$$

On obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3).$$

Donc :

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125}.$$

Ainsi :

$$E(X) = 0 + \frac{54}{125} + \frac{72}{125} + \frac{24}{125}.$$

Donc :

$$E(X) = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}.$$

Par conséquent :

$$E(X) = \frac{6}{5}.$$

Problème

Partie I

1) a) D'après le graphique, la courbe (C_g) est située au-dessus de la courbe (C_h) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$g(x) > h(x).$$

Ainsi :

$$g(x) - h(x) > 0.$$

Par conséquent :

$$g(x) - h(x) > 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

b) On a :

$$g(x) = x^2$$

et :

$$h(x) = 2\ln x - (\ln x)^2.$$

D'après la question précédente :

$$g(x) - h(x) > 0.$$

Donc :

$$x^2 - \left(2\ln x - (\ln x)^2\right) > 0.$$

Ainsi :

$$x^2 > 2\ln x - (\ln x)^2.$$

Comme $x \in]0, +\infty[$, alors :

$$x^2 > 0.$$

En divisant par x^2, on obtient :

$$\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1.$$

Donc :

$$\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

2) a) On considère :

$$H(x) = x \ln x - x.$$

Calculons $H'(x)$:

$$H'(x) = (x \ln x)' - x'.$$

Or :

$$(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)'.$$

Donc :

$$(x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$(x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Alors :

$$H'(x) = \ln x + 1 - 1.$$

D'où :

$$H'(x) = \ln x.$$

Donc H est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent :

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^{e^2}.$$

Donc :

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = (e^2 \ln(e^2) - e^2) - (1 \ln 1 - 1).$$

Or :

$$\ln(e^2) = 2 \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0.$$

Alors :

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = (2e^2 - e^2) - (0 - 1).$$

Donc :

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = e^2 + 1.$$

Ainsi :

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = e^2 + 1.$$

b) Calculons :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx.$$

On utilise une intégration par parties.
On pose :

$$u = (\ln x)^2 \quad \text{et} \quad v' = 1.$$

Donc :

$$u' = \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{et} \quad v = x.$$

Ainsi :

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}\,dx.$$

Donc :

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx.$$

Or :

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$$

Alors :

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x).$$

Donc :

$$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

Par conséquent :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2\,dx = \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^{e^2}.$$

Pour $x = e^2$, on a :

$$e^2(\ln(e^2))^2 - 2e^2\ln(e^2) + 2e^2.$$

Donc :

$$e^2(2)^2 - 2e^2(2) + 2e^2 = 4e^2 - 4e^2 + 2e^2 = 2e^2.$$

Pour $x = 1$, on a :

$$1(\ln 1)^2 - 2\cdot 1\cdot \ln 1 + 2\cdot 1 = 0 - 0 + 2 = 2.$$

Donc :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2\,dx = 2e^2 - 2.$$

Ainsi :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2\,dx = 2e^2 - 2.$$

c) On résout l'équation :

$$h(x) = 0.$$

Or :

$$h(x) = 2\ln x - (\ln x)^2.$$

Donc :

$$2\ln x - (\ln x)^2 = 0.$$

On factorise :

$$\ln x(2 - \ln x) = 0.$$

Ainsi :

$$\ln x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - \ln x = 0.$$

Donc :

$$\ln x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x = 2.$$

Alors :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = e^2.$$

Les points d'intersection de (C_h) avec l'axe des abscisses sont donc :

$$(1, 0) \text{ et } (e^2, 0).$$

d) L'aire demandée est l'aire située entre la courbe (C_h), l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e^2$.
Sur l'intervalle $[1, e^2]$, on a :

$$h(x) \geq 0.$$

Donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^{e^2} h(x)\, dx.$$

Ainsi :

$$\mathcal{A} = \int_1^{e^2} \left(2 \ln x - (\ln x)^2\right)\, dx.$$

Donc :

$$\mathcal{A} = 2 \int_1^{e^2} \ln x\, dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^2\, dx.$$

D'après les résultats précédents :

$$\int_1^{e^2} \ln x\, dx = e^2 + 1$$

et :

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2\, dx = 2e^2 - 2.$$

Alors :

$$\mathcal{A} = 2(e^2 + 1) - (2e^2 - 2).$$

Donc :

$$\mathcal{A} = 2e^2 + 2 - 2e^2 + 2.$$

Ainsi :

$$\mathcal{A} = 4.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A} = 4.$$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

1) a) Calculons :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x).$$

On a :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right).$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

et :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty.$$

Et comme :

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0^+,$$

alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation géométrique :
Comme :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,$$

alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).
Ainsi :

$x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f).

b) Montrons que :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Posons :

$$t = \sqrt{x}.$$

Donc :

$$x = t^2.$$

Lorsque :

$$x \to +\infty,$$

on a :

$$t \to +\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{(\ln(t^2))^2}{t^2}.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(2\ln t)^2}{t^2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{4(\ln t)^2}{t^2}.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2.$$

Or :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \times 0^2.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Maintenant calculons :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

On a :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x}\right).$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

c) On a :

$$f(x) - x = x - \frac{(\ln x)^2}{x} - x.$$

Donc :

$$f(x) - x = -\frac{(\ln x)^2}{x}.$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
Ainsi :

$$y = x \text{ est une asymptote oblique à } (C_f) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

2) a) Calculons $f'(x)$.
On a :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)'.$$

Calculons :

$$\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)'.$$

On a :

$$\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)' = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Par conséquent :

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Ainsi :

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

b) D'après la Partie I, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1.$$

Donc :

$$1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0.$$

Or :

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Ainsi :

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Par conséquent :

$$f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.$$

3) a) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, car elle est composée de fonctions continues sur cet intervalle.
D'après la question précédente, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
De plus :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc, $0 \in]-\infty, +\infty[$
Ainsi :

$$\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha \in]0, +\infty[.$$

b) Calculons $f(e^{-1})$.
On a :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Donc :

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{(\ln(e^{-1}))^2}{e^{-1}}.$$

Or :

$$\ln(e^{-1}) = -1.$$

Alors :

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{(-1)^2}{e^{-1}}.$$

Donc :

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1}}.$$

Or :

$$\frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Ainsi :

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - e.$$

Comme :

$$e^{-1} < e,$$

alors :

$$f(e^{-1}) < 0.$$

D'autre part :

$$f(1) = 1 - \frac{(\ln 1)^2}{1}.$$

Donc :

$$f(1) = 1 - \frac{0^2}{1} = 1.$$

Ainsi :

$$f(1) > 0.$$

Donc d'apres TVI, on obtient :

$$e^{-1} < \alpha < 1.$$

Montrons maintenant que :

$$\ln \alpha = -\alpha.$$

Comme :

$$f(\alpha) = 0,$$

alors :

$$\alpha - \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha} = 0.$$

Donc :

$$\alpha = \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha}.$$

En multipliant par $\alpha > 0$, on obtient :

$$\alpha^2 = (\ln \alpha)^2.$$

Donc :

$$|\ln \alpha| = \alpha.$$

Or :

$$e^{-1} < \alpha < 1,$$

donc :

$$0 < \alpha < 1.$$

Ainsi :

$$\ln \alpha < 0.$$

Par conséquent :

$$|\ln \alpha| = -\ln \alpha.$$

Donc :

$$-\ln \alpha = \alpha.$$

Ainsi :

$$\ln \alpha = -\alpha.$$

c) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Donc :

$$f(x) - x = x - \frac{(\ln x)^2}{x} - x.$$

Ainsi :

$$f(x) - x = -\frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Or :

$$(\ln x)^2 \geq 0$$

et :

$$x > 0.$$

Donc :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} \geq 0.$$

Ainsi :

$$-\frac{(\ln x)^2}{x} \leq 0.$$

Donc :

$$f(x) - x \leq 0.$$

Par conséquent :

$$f(x) \leq x.$$

Ainsi :

$$f(x) \leq x, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

d) Calculons l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
On a :

$$f(1) = 1 - \frac{(\ln 1)^2}{1}.$$

$$f(1) = 1 - \frac{0}{1} = 1.$$

Donc :

$$f(1) = 1.$$

D'autre part :

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Ainsi :

$$f'(1) = 1 - \frac{2\ln 1 - (\ln 1)^2}{1^2}.$$

Donc :

$$f'(1) = 1 - \frac{0 - 0}{1} = 1.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Donc :

$$y = 1(x - 1) + 1.$$

Ainsi :

$$y = x - 1 + 1 = x.$$

Par conséquent :

$$(T) : \; y = x.$$

4) a) Soit φ la restriction de f à l'intervalle $]0,1]$.
Comme f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors φ est continue et strictement croissante sur $]0,1]$.
De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

et :

$$\varphi(1) = f(1) = 1.$$

Donc :

$$\varphi(]0,1]) =]-\infty, 1].$$

Par conséquent, φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur J.
Donc :

$$J =]-\infty, 1] \text{ et } \varphi^{-1} \text{ existe sur } J.$$

b) On sait que :

$$f(\alpha) = 0.$$

Comme φ est la restriction de f à $]0,1]$, et comme $\alpha \in]e^{-1}, 1[$, on a :

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Donc :

$$\varphi^{-1}(0) = \alpha.$$

D'après la formule de dérivation d'une fonction réciproque :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))}.$$

Donc :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}.$$

Or :

$$\varphi'(\alpha) = f'(\alpha).$$

Ainsi :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Calculons $f'(\alpha)$.
On a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Donc :

$$f'(\alpha) = 1 - \frac{2\ln \alpha - (\ln \alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Or :

$$\ln \alpha = -\alpha.$$

Alors :

$$2\ln\alpha = 2(-\alpha) = -2\alpha,$$

et :

$$(\ln\alpha)^2 = (-\alpha)^2 = \alpha^2.$$

Donc :

$$2\ln\alpha - (\ln\alpha)^2 = -2\alpha - \alpha^2.$$

Ainsi :

$$f'(\alpha) = 1 - \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Donc :

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Alors :

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{2\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2}.$$

Donc :

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{2}{\alpha} + 1.$$

Ainsi :

$$f'(\alpha) = 2 + \frac{2}{\alpha}.$$

En réduisant :

$$f'(\alpha) = \frac{2\alpha + 2}{\alpha} = \frac{2 + 2\alpha}{\alpha}.$$

Donc :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}.$$

Ainsi :

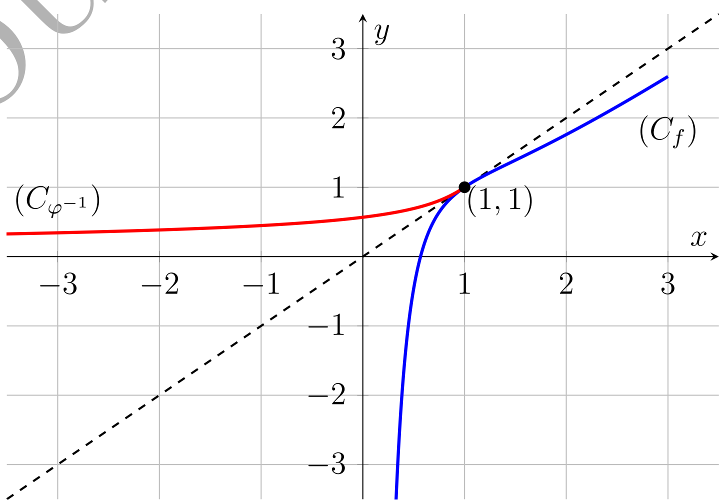
$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}.$$

Par conséquent :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}.$$

c) La courbe de la fonction réciproque φ^{-1} est la symétrique de la courbe de φ par rapport à la droite d'équation :

$$y = x.$$



Partie III

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = e$ et : $u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrons par récurrence que :

$$1 < u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = e > 1.$$

Donc :

$$1 < u_0.$$

Hérédité :
Supposons que :

$$1 < u_n.$$

Comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, alors :

$$f(1) < f(u_n).$$

Or :

$$f(1) = 1.$$

Donc :

$$1 < f(u_n).$$

Mais :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Ainsi :

$$1 < u_{n+1}.$$

Par récurrence :

$$1 < u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) a) Étudions la monotonie de la suite (u_n).
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or, d'après la Partie II :

$$f(x) \leq x, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Comme :

$$u_n > 1,$$

alors :

$$u_n \in]0, +\infty[.$$

Donc :

$$f(u_n) \leq u_n.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

D'où :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Par conséquent :

$$(u_n) \text{ est décroissante.}$$

b) Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, alors elle est convergente. Soit :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Comme :

$$1 < u_n,$$

alors :

$$\ell \geq 1.$$

D'après la proposition sur les suites de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

et puisque f est continue sur $]0, +\infty[$, la limite ℓ vérifie :

$$f(\ell) = \ell.$$

On a :

$$f(\ell) = \ell$$

$$\iff \ell - \frac{(\ln \ell)^2}{\ell} = \ell$$

$$\iff -\frac{(\ln \ell)^2}{\ell} = 0$$

$$\iff (\ln \ell)^2 = 0$$

$$\iff \ln \ell = 0$$

$$\iff \ell = 1.$$

Comme $\ell \geq 1$, alors :

$$\ell = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$